Exercices sur la fonction carré et sur les fonctions polynômes du second degré

Exercice 1

A l'aide de l'allure de la parabole representant la fonction carrée, résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 < 4$.
2. $x^2 \geq 9$.
3. $x^2 > 5$.
4. $2 < x^2 \leq 16$.

Exercice 2

A l'aide de tableaux de signes, résoudre les inéquations suivante :

1. $x^2 < 7$.
2. $x^2 \geq 8$.
3. $4 < x^2 \leq 25$.

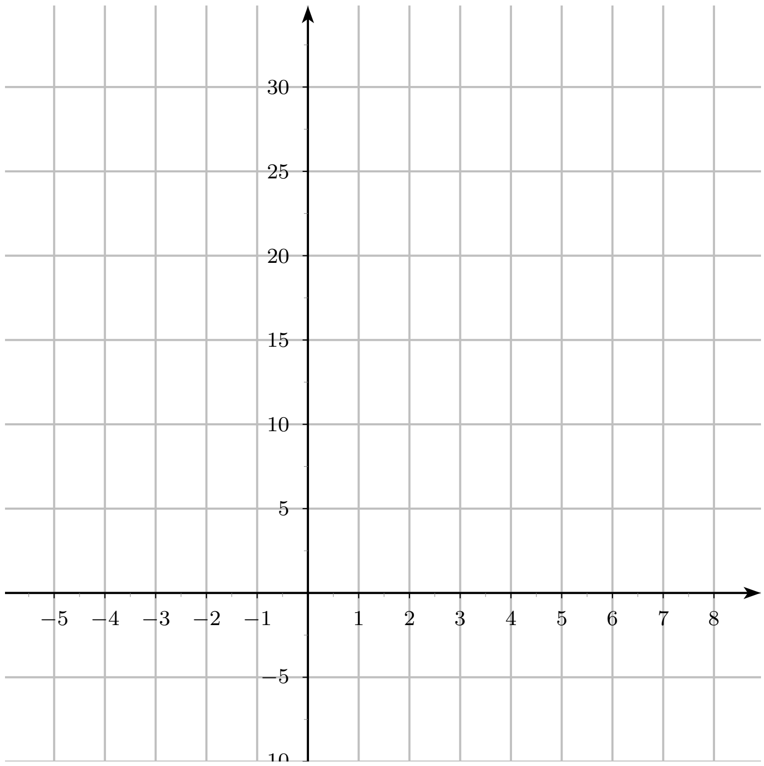
Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1	2	3	4
$f(x)$												

2. Visualiser la courbe représentative de cette fonction sur l'écran puis esquisser ci-dessous cette courbe :



3. Il semble que la courbe soit « entièrement » située au dessus de l'axe des abscisses.
Comment cela se traduit-il pour $f(x)$?
4. En remarquant que 2=1+1, démontrer alors par le calcul la conjecture émise à la question précédente.

Exercice 4

f est la fonction définie par $f(x) = -(x-4)^2 + 25$

1. Montrer que :
   (a) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$
   (b) $f(x) = (9-x)(1+x)$
2. Choisir la forme le plus adéquate pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) = 9$.
   (c) Montrer que f admet un maximum en 4 valant 25.
   (d) Etudier les variations de f sur $]-\infty;4]$ puis sur $[4;+\infty[$.

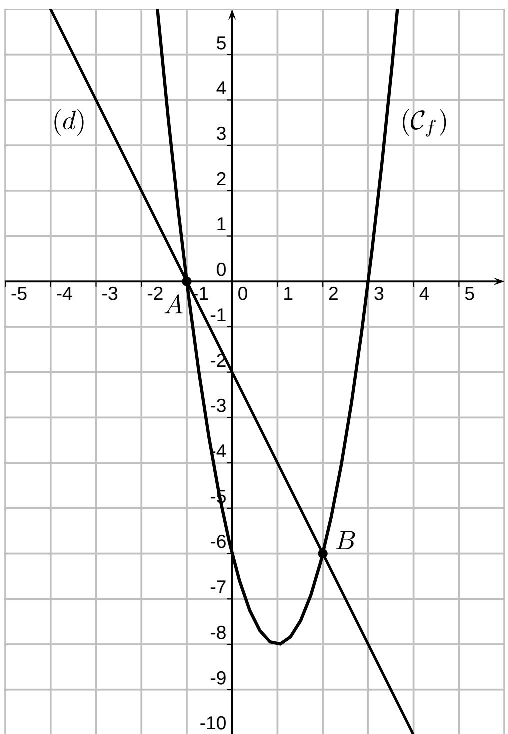
Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-2;5]$ par : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

1. Calculer l'image de 0 , l'image de 3 et l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction f .
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.
3. Au vu de la calculatrice :
   (a) Conjecturer le (ou les) antécédent(s) de 0 par f, en donner des valeurs approchées.
   (b) Conjecturer le tableau de variations de f.
4. (a) Développer $4-(x-1)^2$
   (b) En déduire le (ou les) antécédent(s) de 0 par f .
   (c) Déduire du (b) l'abscisse du sommet de la parabole représentative de f.
   (d) A l'aide du cours, expliquez comment établir le tableau de variations de f, puis donner l'extremum de f.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ *(forme 1)*. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représente la fonction f (voir le graphique ci-dessous).

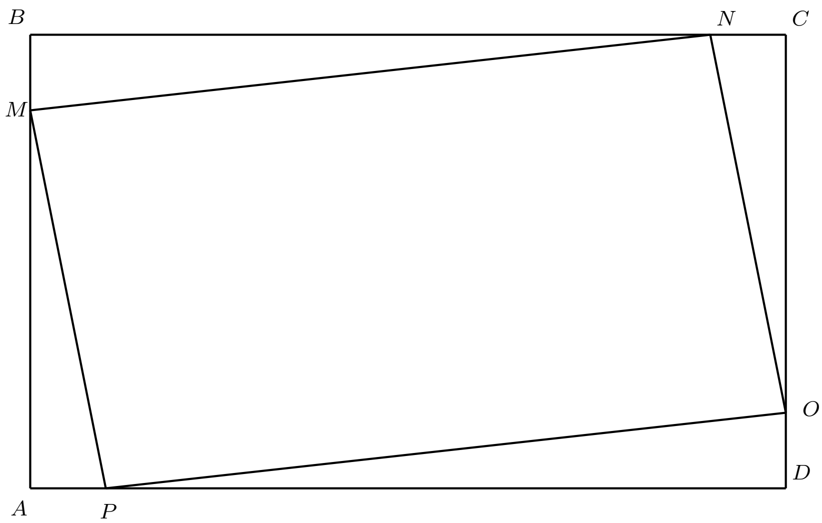


1. (a) Montrer que, pour tout x réel, $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$ *(forme 2).*
   (b) Montrer que, pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)(x+1)$ *(forme 3).*
   (c) Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre l'équation $f(x) = -8$, puis résoudre cette équation. En déduire le ou les antécédents de -8 par la fonction f.
   (d) Choisir la forme la plus adaptée pour déterminer la ou les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses, puis déterminer cette ou ces abscisses.
   (e) En déduire l'abscisse du sommet de la parabole représentative de f et le tableau de variations de f.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x-2$ représentée par la droite (d) sur le graphique.
   (a) Sur le graphique, la droite (d) semble couper la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en deux points notés A et B. Quelles semblent être les coordonnées de ces deux points ?
   (b) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à résoudre l'équation $(x+1)(x-2) = 0$.
   (c) En déduire une résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$.
   (d) Déterminer par le calcul les coordonnées des points A et B.

Exercice 7

On donne pour la figure ci-contre :

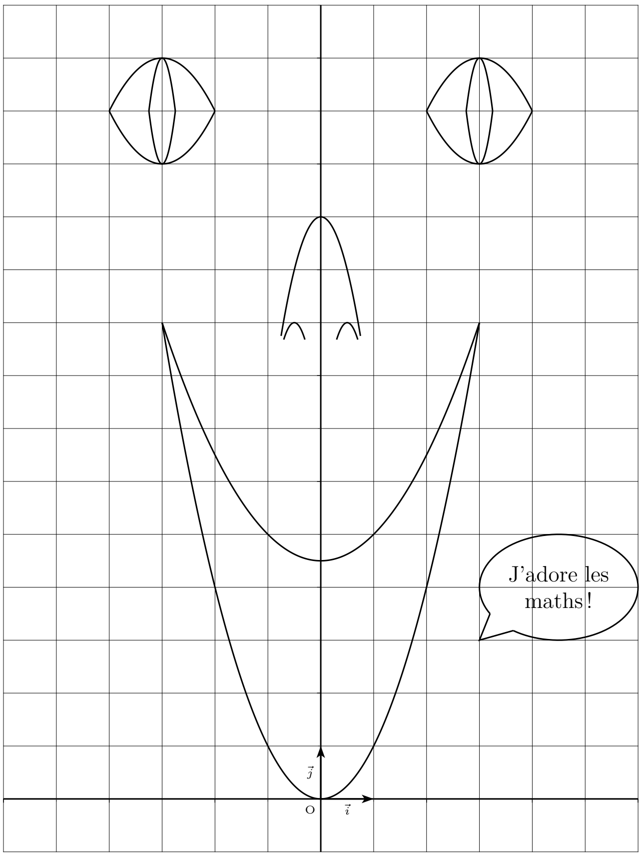
- $ABCD$ est un rectangle
- $AB = 6$
- $BC = 10$
- $M \in [BA]$
- $N \in [BC]$
- $O \in [CD]$
- $P \in [DA]$
- $BM = CN = DO = AP$



1. Calculer l'aire de $MNOP$ lorsque $BM = 1$

   On pose $BM = x$, et on note $\mathcal{A}(x)$, l'aire de $MNOP$.
2. Montrer que $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 16x + 60$
3. A partir du graphique de votre calculatrice, conjecturer et dresser un tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0; 6]$.
4. Conjecturer alors les valeurs maximales et minimales de l'aire de $MNOP$ et pour quelle position de M elles sont atteintes.
5. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   (a) $\mathcal{A}(x) = 2(x-6)(x-2) + 36$
   (b) $\mathcal{A}(x) = 2(x-4)^2 + 28$
6. Utiliser le cours et les différentes écritures de $\mathcal{A}$ pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Pour quelles positions du point M, l'aire est-elle de 36cm^2
   (b) Pour quelles positions du point M, l'aire est-elle minimale ?
   (c) Pour quelles positions du point M, l'aire est-elle maximale ? Justifier.

La figure suivante a été réalisée uniquement avec des paraboles.
Associer aux fonctions définies dans la liste ci-dessous les différentes parties du visage.



$f(x) = x^2$
$g(x) = -8(x - 0.5)^2 + 9$
$h(x) = (x + 3)^2 + 12$
$j(x) = 0.5x^2 + 4.5$
$k(x) = 16(x + 3)^2 + 12$
$l(x) = -4x^2 + 11$
$m(x) = -16(x + 3)^2 + 14$
$p(x) = -(x - 3)^2 + 14$
$q(x) = -16(x - 3)^2 + 14$
$r(x) = -(x + 3)^2 + 14$
$t(x) = 16(x - 3)^2 + 12$
$u(x) = -8(x + 0.5)^2 + 9$
$v(x) = (x - 3)^2 + 12$